Changement de base

Faire le tour des bases

On appelle **base** n l'ensemble des nombres pouvant être écrits à l'aide d'un alphabet de n chiffres, allant de 0 à $n-1$. Par exemple, les nombres que nous utilisons couramment sont exprimés en base 10, avec les chiffres allant de 0 à 9. On parle de système **décimal**. Le système **binaire**, ou base 2, correspond à des nombres écrits uniquement avec les chiffres 0 et 1. S'il n'y a pas assez de chiffres, comme en base 16, appelée système **hexadécimal**, on utilise des lettres : A qui correspond à 10, B à 11, jusqu'à F pour 15.
Pour déterminer la valeur décimale d'un nombre en base b, il faut multiplier chacun des chiffres par une puissance de b dépendant de sa position. Par exemple, en base 10 :

$$243 = 2\times100 + 4\times10 + 3\times1 = 2\times10^2 + 4\times10^1 + 3\times10^0$$

Le chiffre le plus à droite, celui des unités, correspond à b^0. On augmente l'exposant de 1 à chaque fois qu'on se déplace à gauche.
Ainsi, pour le nombre 10011 en binaire, que l'on notera 10011_2, on trouve :

$$10011_2 = 1\times2^4 + 0\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 = 16+2+1 = 19$$

De même, $5F_{16}$ correspond à :

$$5F_{16} = 5\times16^1 + 15\times16^0 = 5\times16+15 = 95$$

Dans le cas d'un nombre écrit en base b, cela revient à appliquer cet algorithme :

$resultat \leftarrow 0$
$i \leftarrow 0$
Pour tous les chiffres c en allant de droite à gauche **:**
    $resultat \leftarrow resultat + c \times b^i$
    $i \leftarrow i+1$
Renvoyer *resultat*

On dit que cette méthode va de droite à gauche puisqu'on multiplie le nombre des unités par b^0 puis celui à sa gauche par b^1 et ainsi de suite.

EXERCICE 1 : En utilisant cet algorithme, donner la valeur décimale des nombres suivants :

1) 101001_2 2) 110100_2 3) 123_4 4) 1230_4
5) 1010_4 6) 123_6 7) AB_{16} 8) FF_{16}

Pour le binaire, on peut utiliser un tableau, comme celui-ci-contre. Il suffit d'inscrire le nombre et d'additionner les nombres en haut des colonnes dans lesquelles il y a un 1.

2^6 64	2^5 32	2^4 16	2^3 8	2^2 4	2^1 2	2^0 1	Décimal
0	0	1	0	0	1	1	19
1	0	0	1	1	0	1	77

EXERCICE 2 : Convertir en décimal les nombres suivants :

1) 0011010_2 2) 0110100_2
3) 1001001_2 4) 1111111_2

Il est également possible d'aller de gauche à droite. C'est la méthode de Horner.

> *resultat* $\leftarrow 0$
> **Pour** tous les chiffres c en allant de gauche à droite **:**
>   *resultat* $\leftarrow b \times$ *resultat* $+ c$
> Renvoyer *resultat*

Ainsi avec cette méthode, pour 10011_2, 10010110_2 et $5F_{16}$:

$$\begin{aligned} 0\times 2+1 &= 1\\ 1\times 2+0 &= 2\\ 2\times 2+0 &= 4\\ 4\times 2+1 &= 9\\ 9\times 2+1 &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0\times 2+1 &= 1\\ 1\times 2+0 &= 2\\ 2\times 2+0 &= 4\\ 4\times 2+1 &= 9\\ 9\times 2+0 &= 18\\ 18\times 2+1 &= 37\\ 37\times 2+1 &= 75\\ 75\times 2+0 &= 150 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0\times 16+5 &= 5\\ 5\times 16+15 &= 95 \end{aligned}$$

Cette méthode peut sembler plus longue, mais pour un ordinateur, multiplier par 2 ou ajouter 1 sont des opérations très rapides et cette méthode est bien plus efficace pour la conversion en binaire que la précédente.

Exercice 3 : En utilisant cet algorithme donner la valeur décimale des nombres suivants :
1) 10000011_2 2) 10100100_2 3) 11111111_2 4) 111111110_2

Et pour aller dans l'autre sens

Pour déterminer l'écriture en base b d'un nombre entier, il y a aussi 2 méthodes possibles.
On peut faire des divisions successives par b. On note les restes et ensuite on les met en partant du dernier au premier.
Voici les conversions de 185 en base 2, 4 et 16.

$$\begin{aligned} 185 : 2 &= 92 \text{ reste } 1\\ 92 : 2 &= 46 \text{ reste } 0\\ 46 : 2 &= 23 \text{ reste } 0\\ 23 : 2 &= 11 \text{ reste } 1\\ 11 : 2 &= 5 \text{ reste } 1\\ 5 : 2 &= 2 \text{ reste } 1\\ 2 : 2 &= 1 \text{ reste } 0\\ 1 : 2 &= 0 \text{ reste } 1 \end{aligned}$$

$$1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,1$$

$$\begin{aligned} 185 : 4 &= 46 \text{ reste } 1\\ 46 : 4 &= 11 \text{ reste } 2\\ 11 : 4 &= 2 \text{ reste } 3\\ 2 : 4 &= 0 \text{ reste } 2 \end{aligned}$$

$$2\,3\,2\,1$$

$$\begin{aligned} 185 : 16 &= 11 \text{ reste } 9\\ 11 : 16 &= 0 \text{ reste } 11 \end{aligned}$$

$$B\,9$$

On a donc $185_{10} = 10111001_2 = 2321_4 = B9_{16}$.
On remarque que dans le cas binaire, le reste est 1 si le nombre est impair et 0 s'il est pair.

Exercice 4 : Convertir le nombre 213 en base 2, en base 4 et en base 16.

Pour l'autre méthode, il faut soit connaître la plus grande puissance de b inférieure ou égale au nombre à convertir, soit vouloir un nombre de chiffres donné, quitte à compléter avec de 0 à gauche.
Cette fois on va diviser par les puissances décroissantes de b, en gardant le reste et en notant les quotients, qui correspondent aux nombres du chiffre en base b. Les chiffres obtenus sont dans le bon ordre, contrairement à la méthode précédente.

1 0 1 1 1 0 0 1

$185 : 2^7 = 1$ reste 57
$57 : 2^6 = 0$ reste 57
$57 : 2^5 = 1$ reste 25
$25 : 2^4 = 1$ reste 9
$9 : 2^3 = 1$ reste 1
$1 : 2^2 = 0$ reste 1
$1 : 2^1 = 0$ reste 1
$1 : 2^0 = 1$ reste 0

2 3 2 1

$185 : 4^3 = 2$ reste 57
$57 : 4^2 = 3$ reste 9
$9 : 4^1 = 2$ reste 1
$1 : 4^0 = 1$ reste 0

B 9

$185 : 16^1 = 11$ reste 9
$9 : 16^0 = 9$ reste 0

On obtient bien les mêmes résultats. Cette méthode est surtout intéressante pour conversions en binaire avec un nombre de k chiffres, avec k connu à l'avance.

Pour i allant de $k-1$ à 0 **:**
  Si $n \geq 2^i$ **:**
    $n \leftarrow n - 2^i$
    Rajouter le chiffre 1 au résultat
  Sinon :
    Rajouter le chiffre 0 au résultat

Exercice 5 : Convertir les nombres suivants en binaire, avec 8 chiffres à chaque fois :

1) 197 2) 63 3) 78

Exercice 6 : Convertir les nombres suivants en hexadécimal, avec 2 chiffres à chaque fois :

1) 230 2) 199 3) 34

Pour le binaire on peut partir de la plus grande puissance de deux inférieure ou égale au nombre et on fait les soustractions successives par les puissances suivantes. On met alors des 1 dans le tableau pour les colonnes correspondant aux puissances utilisées.
L'exemple ci-contre montre que :

$$\begin{array}{r} 71 \\ -\,64 \\ \hline 7 \\ -\,4 \\ \hline 3 \\ -\,2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Décimal	64	32	16	8	4	2	1
71	1	0	0	0	1	1	1

$$71 = 64 + 4 + 2 + 1 = 1000111_2$$

Exercice 7 : Convertir les entiers suivants en binaire :

1) 15 2) 102 3) 57 4) 43

Exercice 8 :

1) Quel est le plus grand nombre pouvant être écrit en binaire avec 8 bits ?
2) Quel est le plus grand nombre pouvant être écrit en hexadécimal avec 2 chiffres ?
3) Les couleurs sont souvent représentées selon le système RGB. On utilise 3 entiers entre 0 et 255 pour la quantité de rouge, de vert et de bleu. Expliquer pourquoi on peut également utiliser 3 octets (3 fois 8 bits) ou 3 nombres hexadécimaux de 2 chiffres chacun.