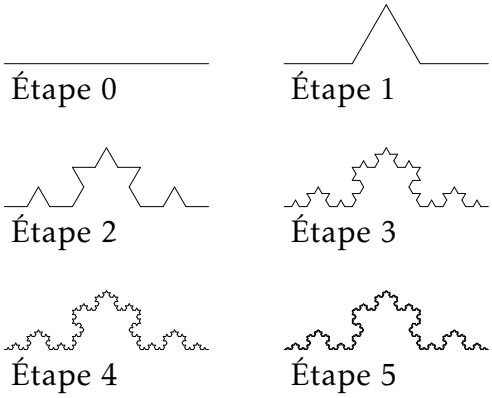
Lycée Les 3 Sources **Bourg-Lès-Valence**
Maths/NSI Année **2023-24**

Beautés fractales

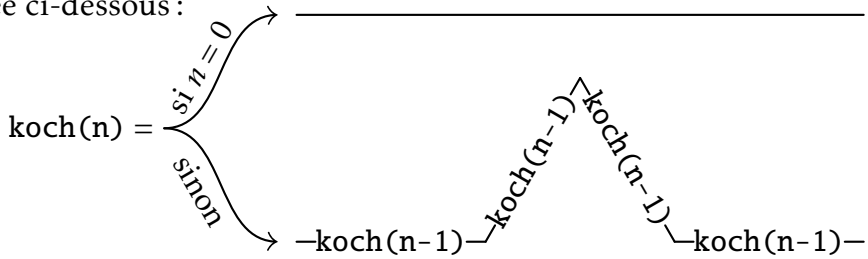
Une première fractale

Une **fractale** est une figure géométrique qui se répète indéfiniment, peu importe à quel niveau de zoom on la regarde. On dit qu'elle est **auto-similaire**. La figure ci-contre est une des figures les plus connues, appelée la courbe de Koch et inventée en 1904. La fractale est obtenue lorsqu'on répète les étapes à l'infini. Si on zoom sur n'importe quelle branche, on obtient exactement la même figure.



Appelons `koch(n)` la figure obtenue à l'étape `n`. Afin de décrire comment la dessiner, les plus simple est d'utiliser la méthode présentée ci-dessous :

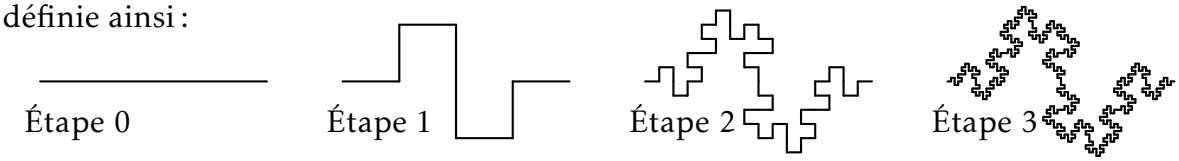
Si `n` vaut 0, on fait un segment. Sinon, on dessine 4 fois `koch(n-1)`, elle-même obtenue en utilisant la même méthode.



On appelle cela une **définition récursive**, c'est-à-dire qu'on définit une valeur initiale et ensuite un processus permettant de construire une nouvelle valeur à partir des précédentes. Ce genre de définition est très utilisé dans la plupart des langages de programmation, comme c'est le cas avec Python.

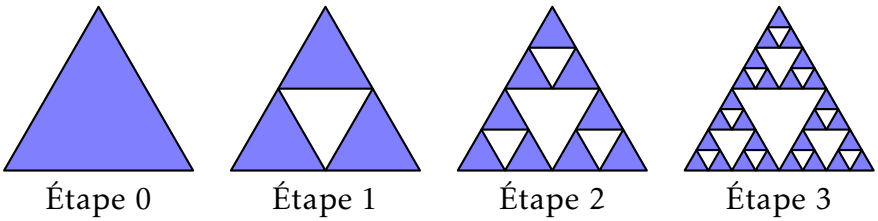
Exemples de fractales

Il existe plusieurs variantes de la courbe de Koch. Par exemple, la **saucisse de Minkowski** est définie ainsi :

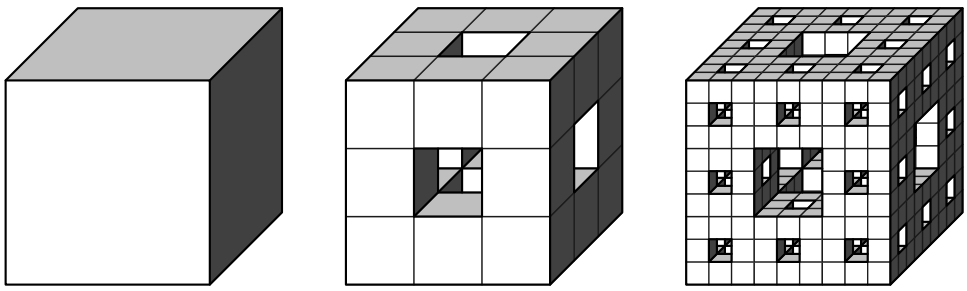


Les fractales ne sont pas uniquement formées à partir de courbes.

Elles peuvent aussi être construites à l'aide de surfaces, comme c'est le cas pour le **triangle de Sierpinski** :



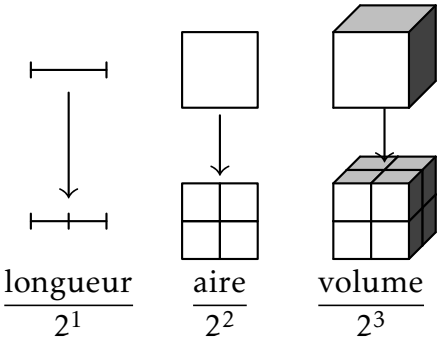
De la même manière, on peut faire des fractales à l'aide de solides, comme pour l'**éponge de Menger** :



Dimension fractale

La notion de dimension est justement une particularité des fractales. Un point est de dimension 0, une courbe a une dimension de 1, une surface a une dimension de 2 et un solide a une dimension de 3. C'est la **dimension topologique**.

Pour simplifier la suite, on appellera **mesure** la longueur pour une courbe, l'aire pour une surface et le volume pour un solide. Lorsqu'on divise la longueur par 2, la mesure d'un objet de dimension d est divisée par 2^d, comme le montre la figure ci-contre. De façon générale, si M est la mesure de l'objet de dimension d, si on divise les longueurs par k, la mesure est alors $\frac{\mathrm{M}}{k^d}$.
Pour les fractales, c'est rarement aussi simple.



Par exemple, on peut découper la courbe de Koch en 4 morceaux, chacun 3 fois plus petits que la figure initiale. La longueur est divisée par 3, mais la mesure est divisée par 4. Cela ne correspond pas au schéma précédent. C'est parce que cette fractale n'est pas vraiment une courbe au sens classique du terme. Elle n'est donc pas de dimension 1. Si on note d la dimension de la figure, on a alors $\frac{\mathrm{M}}{3^d} = \frac{\mathrm{M}}{4}$. On en déduit que $3^d = 4$.
Pour résoudre cette équation, il faut utiliser le **logarithme en base 3**. En effet, $\log_3(k)$ est la solution de l'équation $3^x = k$. On a donc $d = \log_3(4) \approx 1{,}26$.
Pour obtenir ce résultat avec une calculatrice, il faut écrire `log(4, 3)`.
On peut également calculer $\log_3(4) = \frac{\log(4)}{\log(3)}$, où log est en fait le logarithme en base 10.
On appelle cette dimension trouvée, la **dimension fractale** de la courbe de Koch.

Exercice 1 : Démontrer que la dimension fractale est d'environ :
1) 1,5 pour la saucisse de Minkowski.
2) 1,58 pour le triangle de Sierpinski.
3) 2,73 pour l'éponge de Menger.

On peut remarquer que la courbe de Koch a une dimension entre 1 et 2. Cela veut dire qu'elle est entre une courbe et une surface. Par exemple, sa longueur est infinie. En effet, si le segment à l'étape 0 est de longueur 1, à l'étape 1 la figure mesure $\frac{4}{3}$ puis $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ à l'étape 2 et ainsi de suite. La longueur de la courbe est la limite de $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini. Cette longueur est donc infinie.

Exercice 2 : On considère le triangle de Sierpinski.
1) Démontrer que le périmètre est infini.
2) Démontrer que la surface est nulle.

Exercice 3 : On considère l'éponge de Menger.
1) Déterminer le volume de l'éponge.
2) Soit A_n la surface de l'éponge à l'étape n.
   a) Démontrer que $\mathrm{A}_{n+1} \geq \mathrm{A}_n$. On pourra considérer les faces visibles à l'étape n.
   b) En fait, $\mathrm{A}_n = 2\left(\frac{20}{9}\right)^2 + 4\left(\frac{8}{9}\right)^2$. En déduire l'aire de l'éponge.