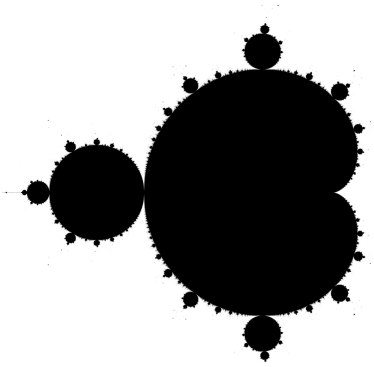
Lycée Les 3 Sources **Bourg-Lès-Valence**
Maths/NSI Année **2023-24**

L'ensemble de Mandelbrot

Vers l'ensemble de Mandelbrot

Toutes les fractales sont auto-similaires. Pour certaines fractales, cette propriété n'est pas toujours évidente. Pour être une fractale, il faut surtout que la figure ait un niveau de détail infini. L'une des fractales les plus connues n'apparaît pas facilement comme auto-similaire. C'est **l'ensemble de Mandelbrot**. Cette fractale ne ressemble à aucune de celles que nous avons vues jusqu'à présent. Elle n'est pas définie par un principe de construction mais plutôt par une formule mathématique.



Cet ensemble a été défini au début du 20e siècle par Gaston Julia et Pierre Fatou mais c'est Benoit Mandelbrot qui l'a rendu célèbre en générant les premières visualisations en 1980.

Exercice 1 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + c$ pour un certain réel c. Calculer les premières valeurs de (u_n) avec :

1) $c = 1$ 2) $c = 2$ 3) $c = -1$
4) $c = -2$ 5) $c = -3$ 6) $c = 0{,}2$

Pour certaines valeurs de c, la suite semble converger. Pour d'autres, elle alterne entre plusieurs valeurs. Enfin, pour d'autres valeurs, la suite diverge vers l'infini.
On peut donc caractériser les valeurs de c ainsi : soit elles engendrent une suite divergente vers l'infini, soit elles engendrent une suite dont les valeurs restent bornées. L'ensemble de Mandelbrot est une généralisation de ce principe à tous les points du plan.

Nombres complexes

Il y a plusieurs façon d'associer un nombre c à chaque point du plan. Nous allons utiliser **les nombres complexes**.
L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$. Mais imaginons qu'elle ait une solution qui serait un nouveau type de nombres. Notons i cette solution. On a donc $i^2 = -1$. On dit que ce nombre est **imaginaire**, puisqu'il n'est pas réel. Un **nombre complexe** z est un nombre de la forme $z = a + ib$, avec a et b deux réels. Le nombre a est la **partie réelle** de z et b la **partie imaginaire**. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
L'ensemble des nombres complexes contient l'ensemble des nombres réels. Ce sont les nombres complexes qui n'ont pas de partie imaginaire.

Exercice 2 : Déterminer le résultat des expressions suivantes.

1) $(2 + 5i) + (3 - i) =$
2) $(2 + 5i) \times (3 - i) =$
3) $(1 + i)^2 =$
4) $(-0{,}5 + 0{,}2i)^2 =$

Puisque chaque nombre complexe est défini par un couple $(a; b)$, on peut facilement associer chaque point $\mathrm{M}(x; y)$ au nombre complexe $z = x + iy$.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe associé au point M. On note $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ **le module** de z. On remarque que $|z| = \mathrm{OM}$, où O est l'origine du repère orthonormé considéré.

Exercice 3 : Calculer :

1) $|2+5i| =$

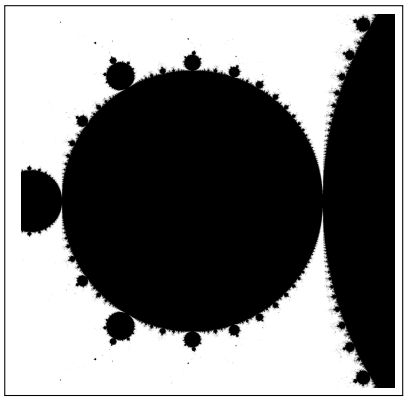
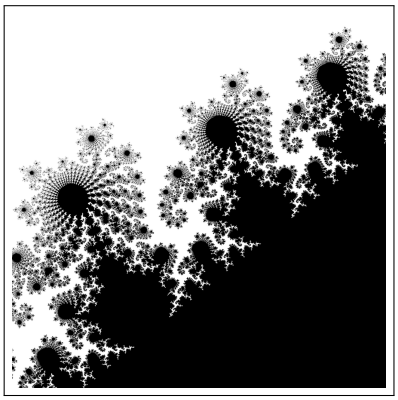
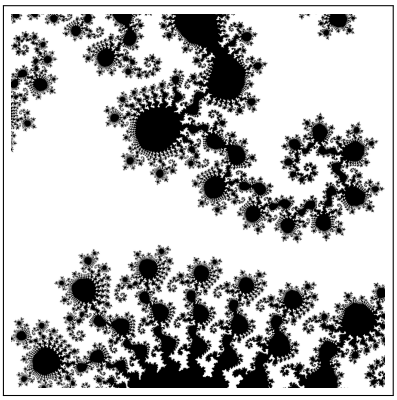
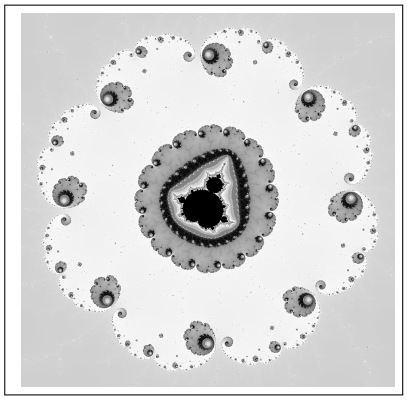
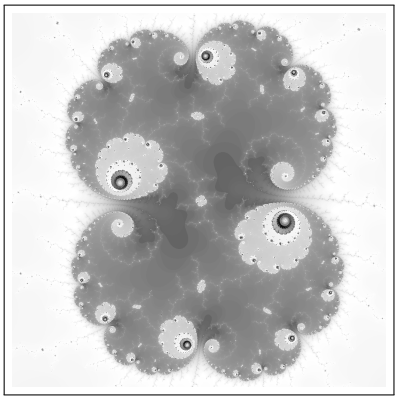
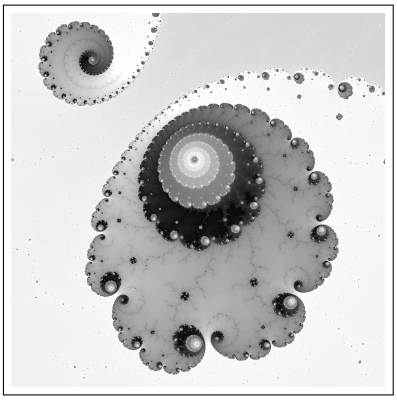
2) $|3-i| =$

3) $|-0{,}5+0{,}2i| =$

L'ensemble de Mandelbrot

Un nombre complexe c appartient à l'ensemble de Mandelbrot si la suite (z_n), telle que $z_0 = 0$ et $z_{n+1} = z_n^2 + c$, est bornée. C'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $|z_n| < k$ pour tout n.
Les calculs sont relativement fastidieux à faire à la main. C'est pourquoi on utilise un ordinateur pour calculer un grand nombre de valeurs de (z_n). Mais à partir de quel rang peut-on être sûr que la suite est bornée ou non ? Il a été démontré que si $|z_n| > 2$ pour un certain rang, alors la suite est divergente vers l'infini.

Exercice 4 : Pour chacune des valeurs de c, calculer les premiers termes de la suite (z_n) et déterminer si elle appartient à l'ensemble de Mandelbrot.

1) $c = i$ 2) $c = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 3) $c = -0{,}12 + 0{,}74i$

Pour afficher l'ensemble de Mandelbrot, on calcule pour chaque point de l'image si le nombre complexe c associé appartient à l'ensemble ou pas. On calcule le module des premiers termes de la suite engendrée par c. Si au bout d'un certain nombre d'itérations le module n'a pas dépassé 2, on considère que c est dans l'ensemble de Mandelbrot. En général, on colorie en noir les points de l'ensemble. Pour les autres points, on peut associer une couleur correspondant au nombre d'itérations nécessaires pour que le module dépasse 2.
Cet ensemble est fascinant parce qu'en zoomant sur n'importe quel endroit de la frontière, on observe des motifs très particuliers qui sont à la fois semblables avec ceux qui sont à côté et très différents de ceux observés à d'autres endroits. On peut aussi relier cet ensemble à d'autres éléments mathématiques bien connus, comme la suite de Fibonacci ou le nombre d'or.