Lycée Les 3 Sources **Bourg-Lès-Valence**
Maths/NSI Année **2023-24**

Les nombres premiers et les spirales

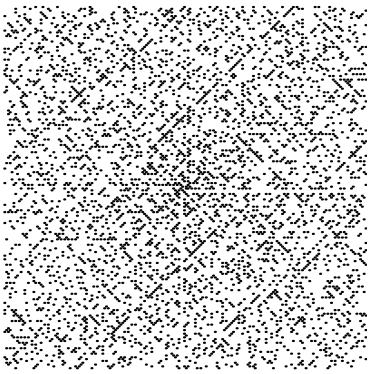
La spirale d'Ulam

Alors qu'il était forcé d'assister à un exposé très long qui ne le passionnait pas vraiment, le mathématicien Stanislaw Ulam s'est mis à gribouiller sur une feuille de papier. Il a mis un 1 au centre et a ensuite écrit les entiers suivants en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Il a ensuite entouré les nombres premiers. On appelle cela une **spirale d'Ulam**.

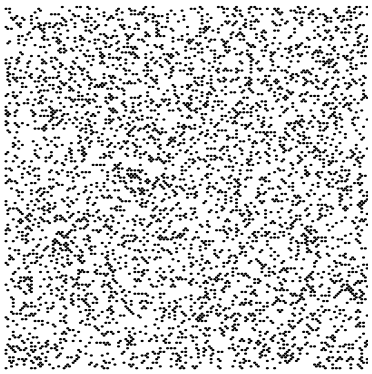
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

Exercice 1 : Entourer les nombres premiers dans la spirale ci-contre.

On peut remarquer que les nombres premiers semblent dessiner des segments en diagonale. En effet, dans la grille, les nombres alternent entre pair et impair, comme les cases blanches et noires sur un échiquier.
Les nombres premiers, à part 2, étant tous impairs, il est normal de retrouver ces regroupements sur les diagonales. Mais cela ne suffit pas à expliquer ces formes. On peut comparer la spirale d'Ulam formée des 40 000 premiers nombres, avec les nombres premiers marqués par un point, et une autre grille où des nombres impairs ont été marqués au hasard, avec la même densité.



Spirale d'Ulam jusqu'à 40 000



Nombres impairs aléatoires

On peut noter que les alignements en diagonale sont plus marqués dans la spirale d'Ulam que dans la grille aléatoire.
On peut obtenir les valeurs alignées sur une demi-droite en diagonale à l'aide de formules quadratiques de la forme $4n^2 + 2bn + c$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec b et c des entiers naturels.

Exercice 2 : Identifier les demi-droites déterminées par ces formules en calculant les premières valeurs.

1) $4n^2 + 2n + 1$ 2) $4n^2 + 4n + 2$ 3) $4n^2 + 6n + 3$ 4) $4n^2 + 8n + 4$

La valeur de b définit la direction et le sens, alors que c permet de définir la valeur de départ. Par contre, il se peut que les premières valeurs ne soient pas alignées.

Exercice 3 : Déterminer à partir de quelle valeur de n la formule $4n^2 + 2n + 5$ génère une demi-droite.

On remarque que dans les 4 formules de base, c vaut 1, 2, 3 ou 4. Ce sont les 4 premières valeurs de la spirale. Si on commence la spirale par c au lieu de 1, les valeurs suivantes sont $c+1$, $c+2$ et $c+3$. Les formules $4n^2+2n+c$, $4n^2+4n+c+1$, $4n^2+6n+c+2$ et $4n^2+8n+c+3$ permettent d'obtenir les valeurs sur les 4 demi-droites partant du centre de cette nouvelle spirale.

Exercice 4 :

1) Dessiner les premières valeurs de la spirale d'Ulam en mettant 41 au centre.
2) Déterminer les formules donnant les 4 demi-droites partant de 41, 42, 43 et 44.
3) Vérifier que les premières valeurs générées par ces formules sont bien alignées dans votre spirale.

En fait, la formule n^2+n+c permet même de générer toutes les valeurs de la diagonale allant du coin bas gauche au coin haut droite dans la spirale dont la valeur centrale est c.

Exercice 5 : On considère la formule n^2+n+41.

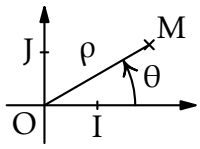
1) Cette formule célèbre a été découverte par Euler.
   a) Calculer les valeurs de n^2+n+41 inférieure à 100.
   b) Qu'est-ce qui rend cette formule si spéciale ?
2) Sur la spirale commençant en 41, les valeurs correspondent aux deux demi-droites partant de 41 et de 43. Une des demi-droites est générée par les valeurs paires de n et l'autre par les valeurs impaires.
   a) En prenant $n=2k$, retrouver la formule permettant de générer les valeurs d'une des demi-droites.
   b) En prenant $n=2k+1$, retrouver la formule permettant de générer les valeurs de l'autre demi-droite.

Cette formule n'est pas miraculeuse et ne donne pas que des nombres premiers, même s'il faut un n assez grand pour trouver un contre-exemple.
La spirale d'Ulam permet ainsi de visualiser les nombres premiers générés par cette formule. Les autres points alignés qui apparaîssent dans la spirale peuvent aussi être obtenus en utilisant d'autres formules, comme $4n^2+2n+59$ ou n^2+n+17.

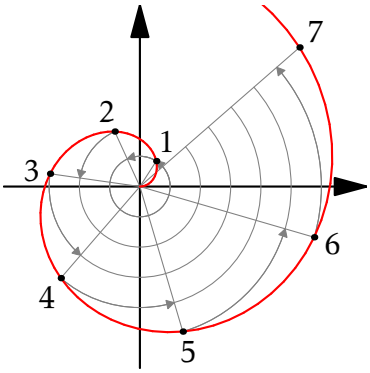
La spirale d'Archimède

La spirale d'Ulam n'est pas la seule façon de placer les entiers naturels sous la forme d'une spirale. On peut aussi, entre autres, faire une **spirale d'Archimède** en utilisant les **coordonnées polaires**.

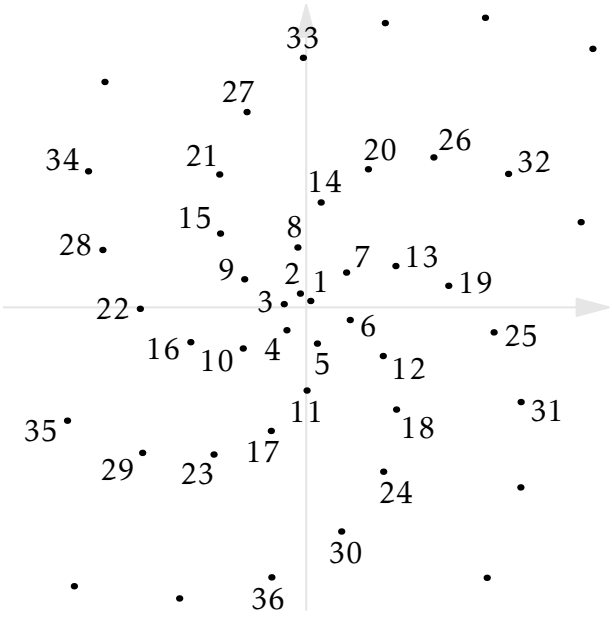
En général, on associe à un point du plan ses coordonnées cartésiennes $(x;y)$. Mais on peut aussi définir un point M dans un repère orthonormé (O;I,J) à l'aide de la distance $\rho = \text{OM}$ et de l'angle orienté $\theta = \widehat{\text{IOM}}$ mesuré en radians. Les coordonnées polaires du point M sont alors $(\rho;\theta)$.



Pour faire une spirale d'Archimède en coordonnées polaires, on associe à chaque entier naturel n le point de coordonnées polaires $(n;n)$. C'est-à-dire qu'on place le point à la distance n de l'origine du repère et on tourne de n radians dans le sens inverse des aiguilles d'une montre en partant de l'axe des abscisses. En reliant les points avec des courbes, on dessine une spirale.



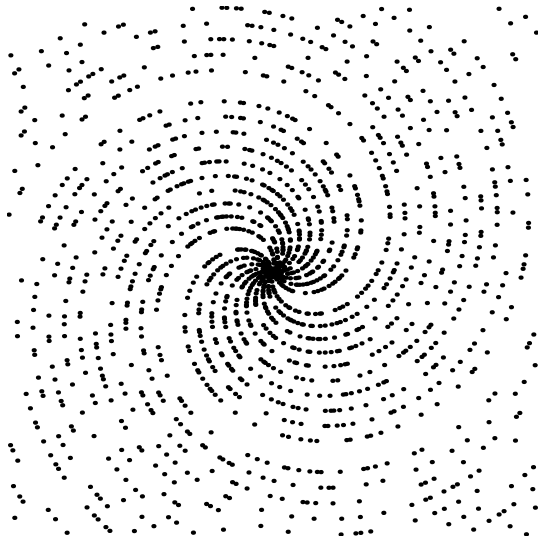
On peut voir sur la figure ci-contre se former 6 spirales dont seules deux contiennent des nombres premiers, à l'exception de 2 et de 3. Il y a 6 spirales parce que l'angle 6 radians est proche de 2π, donc d'un tour complet. L'angle 12 radians fait presque un tour de plus que 6 radians, et ainsi de suite. Une des spirales est formée par les nombres 6, 12, 18, 24… Ce sont des multiples de 6. La spirale suivante est formée par les nombres 1, 7, 13, 19… Si on fait une division euclidenne de ces nombres par 6, le reste est toujours 1. On dit que deux nombres a et b sont **congrus modulo** n s'ils ont le même reste dans la division euclidienne par n. Les nombres de chaque spirale sont tous congrus modulo 6.



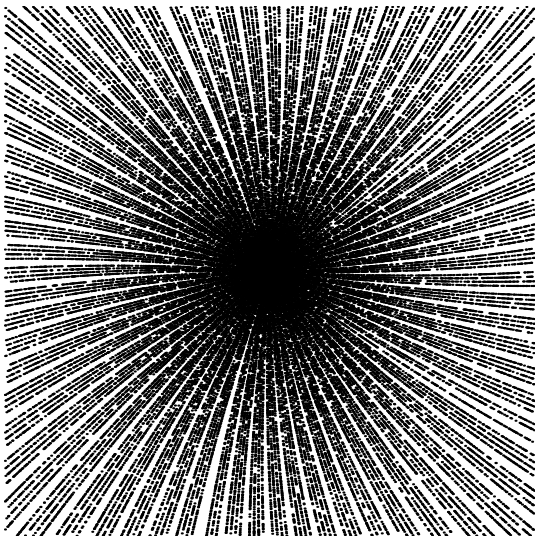
Exercice 6 :

1) Entourer les points correspondant à des nombres premiers sur la figure ci-dessus.
2) Expliquer pourquoi il y a 6 restes possibles dans la division euclidienne par 6.
3) Les nombres congrus à r modulo 6, avec $r < 6$, peuvent se noter $6k + r$, avec $k \in \mathbb{N}$.
   a) Expliquer pourquoi les nombres correspondant à $6k$ ne peuvent pas être premiers.
   b) Expliquer pourquoi les nombres correspondant à $6k+3$ ne peuvent pas être premiers, à l'exception de 3.
   c) En procédant de la même manière, déterminer les formules ne permettant pas d'obtenir plus d'un nombre premier et celles qui peuvent, au contraire, générer un nombre infini de nombres premiers.
4) On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** si 1 est leur seul diviseur commun.
   a) Déterminer les entiers naturels $r < 6$ qui sont premiers avec 6.
   b) Que remarquez vous ?

En fait, il n'y a pas que le nombre 6 qui génère des spirales, dont certaines contiennent un nombre infini des nombres premiers. Voici deux autres exemples, à des échelles différentes, en ne gardant que les nombres premiers. Par contre, pour identifier les nombres générant ces spirales, il vaut mieux utiliser un ordinateur…



Jusqu'à $n \approx 16\,500$



Jusqu'à $n \approx 1\,000\,000$